

角柱の挿入により非定常化した平行平板間流れの 数値計算

川原秀夫 (大島商船高等専門学校 商船学科)

西村龍夫 (山口大学 工学部 機械工学科)

Numerical Simulation of Self-Sustained Oscillatory Flow Behind a Square Rod in a Channel

Hideo KAWAHARA (Oshima National College of Maritime Technology)

Tatsuo NISHIMURA (Department of Mechanical Engineering)

The present paper describes the effects of time step and grid size on the numerical results for unsteady flow problems. We studied Karman vortex behind a square cylinder in a channel at intermediate Reynolds numbers, using a finite volume code. It is revealed that the numerical errors strongly depend on respective physical quantities such as velocities and Strouhal number etc. The predicted Strouhal number satisfactorily agrees with the experiment additionally performed

Key Words : numerical simulation , numerical error, flow visualization, Karman vortex, Strouhal number

1. 緒言

ブラフボディ後方の非定常流は、その流れが示す規則的な構造、および様々な工業的応用のため数多くの実験的ならびに数値的研究の対象となってきた。また、この流れの工業的応用の多くが壁近傍の非定常的な特性よりも、後流の非定常的な特性に関係しているため、多くの実験的研究が後流中の Karman 渦の非定常挙動の解明をその主たる目的としている。一方、この流れは数値計算の代表的なベンチマークとして位置付けることもでき、そのため多くの数値的研究の対象ともなってきた。とりわけ最近では、コンピュータ演算スピードの高速化および高次精度計算手法の開発により、基礎方程式を数値的に積分することが可能となり、直接数値計算 (DNS) による研究も多く行われ始めている。DNS を用いた後流挙動に関する計算は既に行われており、抗力係数、渦の振動周波数などについて実験との比較がなされている^{1)~4)}。また最近では、DNS を用いた 3 次元の計算⁵⁾が行われ、2 次元数値計算の限界を指摘している。

本研究では、後流と噴流の特性を併せ持ったブラフ

ボディ型燃焼器⁶⁾の数値シミュレーションを開発する最初の段階として、幾何学形状として簡単な平行平板間流れを取り上げ、角柱を挿入し不安定化させた場合の流れ場に関して、2 次元数値計算を行う。本研究の目的は、計算結果の検討を通して将来の様々な非定常流下の問題に対する数値的研究の指針を得ることである。特に、従来あまり検討されていない計算結果に与える時間ステップ、格子間隔の影響を調べ、St 数の計測や流れの可視化実験との比較を通じて、数値解析の妥当性を検証するものである。

2. 記号

B : 角柱寸法
L : 流路長さ
H : 流路幅
W : 奥行き
f : 渦の放出周波数
T : 周期
P : 無次元圧力 ($= P' / (\rho \cdot u_a^2)$)
Re : 角柱レイノルズ数 ($= u_a \cdot B / \nu$)

2 (2)

St : ストロク - ハル数 (= $f \cdot B / u_a = 1 / T$)

t : 無次元時間 (= $t' \cdot u_a / B$)

t : 無次元時間ステップ

u : x 方向無次元速度 (= u' / u_a)

u_a : 入口断面平均速度

v : y 方向無次元速度 (= v' / u_a)

u : 無次元速度 u の変動幅

x : 流れ方向無次元座標 (= x' / B)

y : 高さ方向無次元座標 (= y' / B)

: 閉そく比 (= B / H)

: 流体の密度

: 流体の動粘性係数

肩字

: 有次元量

3. 数値解析の手法および条件

3.1 基礎方程式

解析対象の流体として非圧縮性のニュートン流体を仮定し、重力等の外力を無視すると、2次元流れの無次元化された方程式は次のように与えられる。

(連続の式)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

(1)

(運動方程式)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \\ = - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \\ = - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

(3)

ここで、u、vは流れ方向座標xと流れに垂直な方向座標yの速度成分であり、座標の原点は Fig.1 に示したように角柱の中心とする。

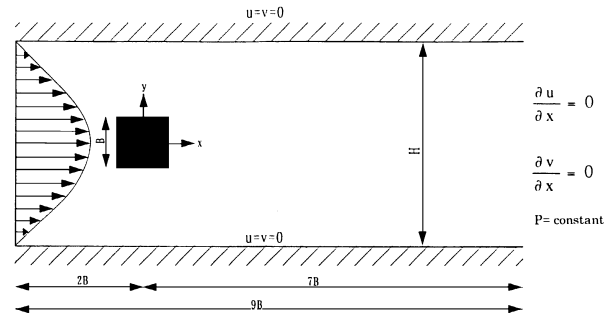


Fig.1 Flow configuration and coordinate system

2次元非定常流体解析法には、速度・圧力法のほか、流れ関数・渦度法⁷⁾などがあるが、本研究では境界条件の与え方が容易であること、3次元計算への拡張を考慮に入れ、速度・圧力法を用いることにする。

3.2 計算格子

計算領域内には、圧力Pと速度成分u、vの定義点を半格子ずらして配置した等間隔スタagger - ド格子を採用した。Fig.2 はスタagger - ド格子の概略図を示す。

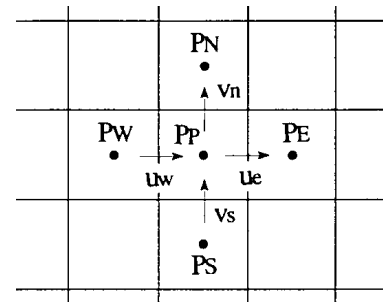


Fig.2 Staggered and uniform distributions

格子数として 50×50 、 80×80 、 100×100 、 120×120 の計4種類を用い、計算結果に与える影響を検討した。なお、Fig.2 に本研究で使用した計算格子 (100×100) を示す。

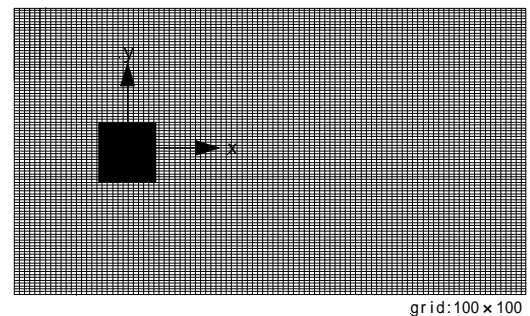


Fig.3 Grid system

3.3 計算方法

各保存方程式の離散化には有限体積法を用い、式(2)、(3)の拡散項には中心差分を、対流項には数値粘性の影響を改善するために、3次精度風上差分 (QUICK) を適用した。非圧縮性流体では、連続の式(1)が運動方程式(2)、(3)に対する拘束条件となるのでこれらを同時に満足するように速度成分 u 、 v および圧力 P の数値解を効率的に求める計算アルゴリズムが必要になる。本計算では、圧力補正式による SIMPLE 法⁵⁾を採用した。以下に SIMPLE 法を用いて推測した圧力 P^* を改善する手順について説明する。

速度 u を求める x 方向運動方程式(2)の離散化式

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + b + A_e (P_P - P_E) \quad (4)$$

同様に v を求める y 方向運動方程式(3)の離散化式

$$a_n v_n = \sum a_{nb} v_{nb} + b + A_n (P_P - P_N) \quad (5)$$

ここで、 a 、 b は係数、 A_e 、 A_n は圧力が作用する面積である。さらに添字は格子点の位置を示し、特に nb は点 P の全ての隣接点を表している。

圧力に対して適切な推定値 P^* を与えると、速度に対して近似式 u^* 、 v^* を式(4)、(5)から以下のように求めることができる。

$$a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb} + b + A_e (P_P^* - P_E^*) \quad (6)$$

$$a_n v_n^* = \sum a_{nb} v_{nb} + b + A_n (P_P^* - P_N^*) \quad (7)$$

正しい圧力および速度を P 、 u 、 v とし、推定値 P^* に対する補正量を P' 、それに対応する速度補正量を u' 、 v' とする。すなわち、

$$P = P^* + P' \quad (8)$$

$$u = u^* + u' \quad (9)$$

$$v = v^* + v' \quad (10)$$

の関係式を定義する。この3式を式(4)、(5)に代入し、各々の式(6)、(7)を差し引くと、

$$a_e u_e' = \sum a_{nb} u_{nb}' + A_e (P_P' - P_E') \quad (11)$$

$$a_n v_n' = \sum a_{nb} v_{nb}' + A_n (P_P' - P_N') \quad (12)$$

ここで、隣接する格子点の速度補正量の影響が小さいと考えて、右辺第1項を省略する。したがって速度補正量は、

$$u_e' = d_e (P_P' - P_E') \quad , \quad d_e \equiv A_e / a_e \quad (13)$$

$$v_n' = d_n (P_P' - P_N') \quad , \quad d_n \equiv A_n / a_n \quad (14)$$

したがって、連続の式(1)の離散化に必要な速度は次式で与えられる。

$$u_e = u_e^* + d_e (P_P' - P_E') \quad (15)$$

$$v_n = v_n^* + d_n (P_P' - P_N') \quad (16)$$

連続の式の離散化式に式(15)、(16)および u_w 、 v_s に関する同様な式を代入し、圧力補正量 P' に関する圧力補正式を得る。

$$a_p P_P' = a_e P_E' + a_w P_W' + A_N P_N' + a_s P_S' + b \quad (17)$$

上式より、 P' が得られると、次に P' を式(8)および式(15)、(16)に代入して新しい P 、 u 、 v が求まる。これらの値が収束解に達していなければ、 P は式(8)の P^* に置き換わり、繰り返し計算を行う。

計算過程で解の収束を加速する目的で、緩和係数 ($\omega = 0.7$) を用いた SOR 法を併用した。さらに、運動方程式(2)、(3)は、時間ステップ毎に繰り返し計算を施しつつ、完全陰解法により時間発展させた。

なお、本計算コードの妥当性を確認するため、平行平板流路の発達流れの計算⁹⁾を行った。その結果、速度が理論解と一致していることを確認した。

計算条件による数値安定性を判断する基準として、ク - ラン数 $c (= \tau \cdot u / \Delta x)$ があり、時間差分スキ - ムを陽解法とした場合、数値安定性の条件は $c < 1.0$ になる。本研究では、時間スキ - ムを完全陰解法としているため、この制約条件は必要ないものと考えられる。格子数 120×120 、 $\tau = 10^{-4}$ では最大ク - ラン数 c は、0.0026 になる。

3.4 計算条件

計算は、Fig. 1 に示した流れ方向の全長が $9B$ の計算領域で行った。その入口境界は角柱設置位置の $2B$ 上流に、また出口境界は角柱より $7B$ 下流に設置されている。境界条件は、入口境界においてはポアズイユの完全発達流れ、出口境界では、速度の x 方向の一階微分が 0 とした。さらに、平行平板流路壁では、ノンスリップ条件より速度成分は 0 とした。対象とする角柱の寸法 B は、 $(3/10)H$ 、 $(1/5)H$ の2種類とし、角柱の幅 B 基準のレイノルズ数 Re は、 $50 \sim 500$ まで変化させた。なお、計算に用いた時間ステップ τ は $1 \sim 10^{-4}$ である。

次に、流れ場の計算結果を表示するために使用した粒子軌跡について説明する。粒子軌跡は、次式を積分することによって、質量 0 のトレ - サ粒子の運動を記

4 (4)

述することができる。

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y, t) \quad (18)$$

$$\frac{dy}{dt} = v(x, y, t) \quad (19)$$

式(18), (19)の積分方法には高次精度の陽解法である4次精度ルンゲ・クッタ法を用いた。なお、格子点上にない速度を知るためには、既存の速度の各格子点を線型補間した。ここで粒子は、注入場所(計算領域内の角柱上流部と角柱背後)から、各時間ステップ毎に次々と新しい粒子を放出していくものとする。

4. 結果および考察

Fig.4 は $\beta=1/5$, $Re=40$ の場合の流線を示す。この場合、流れの状態は定常・対称流であるが、 $Re=50$ になると非定常・非対称流へ変化することが確認された。

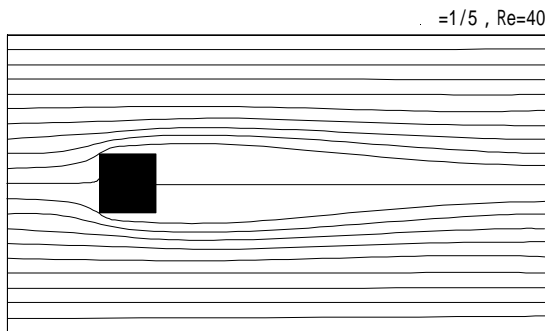


Fig.4 Streaklines for steady and symmetric flow at $Re=40$

まず、 Δt および格子数が非定常流れ場に与える影響を検討するため、 $Re=100$ の計算結果を基に考察する。Fig.5 は、縦軸に x 方向無次元速度 u 、横軸に無次元時間 t をとり、 $t=10^{-4}$ 、格子数 100×100 の場合における2点の速度の時間変化を示す。

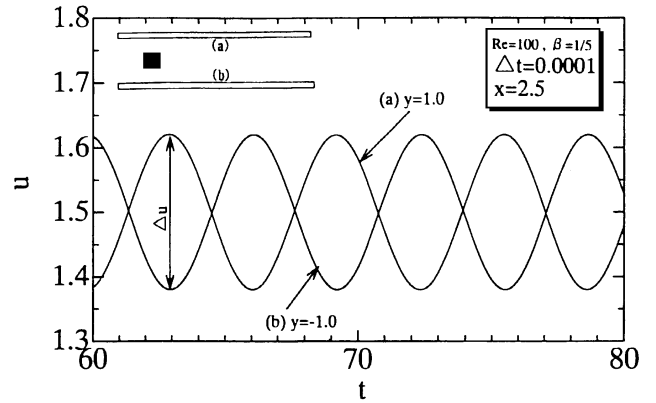


Fig.5 Oscillation of longitudinal velocities in the wake region at $Re=100$

これら2点は、 $x=2.5$, $y=1.0, -1.0$ の位置における速度変動を表しており、この時間帯では振幅の大きさ u はほぼ一定値に達しており、周期的な正弦波状の速度変動が観察される。また、2点間で位相が 180 度異なっていることから、角柱背後の流れ場は上下で交互に振動していることが推察できる。この結果を基にして、計算パラメータ(時間ステップ、格子間隔)による速度変動幅の変化を検討した。

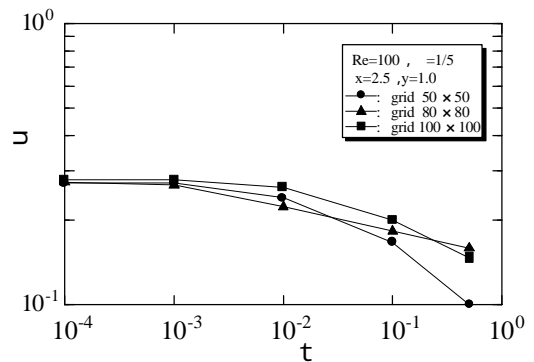


Fig.6 Relationship between velocity amplitude and time step

Fig.6 は、 $x=2.5$, $y=1.0$ における速度変動幅と時間ステップの関係を示す。 u は、 Δt に強く依存するが、 $\Delta t=10^{-4}$ で収束(約 0.27)していることがわかる。格子数の影響を見ると、格子間隔が小さい程(格子数が大)早く一定値に収束し、例えば格子数 100×100 では $\Delta t=10^{-3}$ で既に収束している。次に、Fig.4 の速度変動から、変動の無次元周期を求め St 数を算出した。

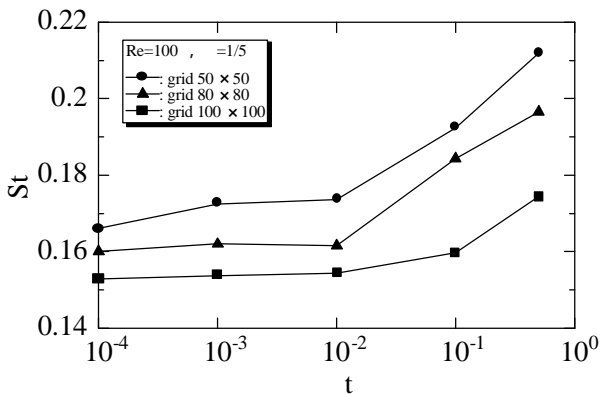


Fig.7 Relationship between Strouhal number and time step

Fig.7はその結果を示す。tが小さくなると、St数は減少する傾向にあり、 $t > 10^{-2}$ では一定値に漸近している。しかし、Fig.5の結果とは異なり、各格子数の漸近値は異なっている。すなわち、各物理量の計算パラメータの依存性は、同じではないことに注意すべきである。したがって、非定常計算において、正確な解を得るためには時間ステップに加えて、格子数の影響を十分に吟味しなければならないことがわかる。

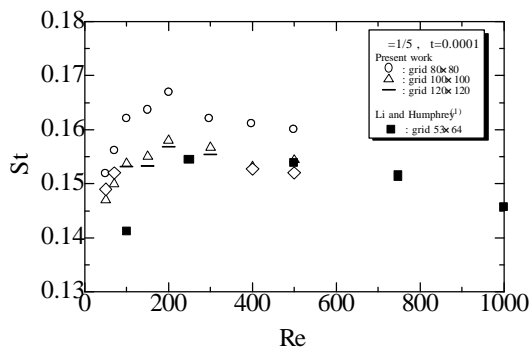


Fig.8 Relationship between Strouhal number and Reynolds number

Fig.8はRe数に対するSt数の変化をLiら¹⁾の計算結果と合わせて示す。全体的な傾向として、St数はRe 200まで急激に増加しているが、 $Re > 200$ では減少している。先に述べたように格子数80×80と100×100では大きな差があるが、格子数100×100と120×120ではその差がかなり小さくなっており、格子数は100×100より大きくないと、St数は正確な解が得られないことがわかる。本計算結果は、Liらの結果と傾向は一致しているが、定量的には、 $Re = 100$ で7.5%の差が見られる。この原因は格子数によるものと考え

られる。

Fig.9は閉そく比の影響を検討するため、 $\beta = 1/5$ 、 $3/10$ におけるRe数に対するSt数の変化を示す。また同図には、 $\beta = 0$ におけるSohankarら⁵⁾の実験結果も併示している。Re数の増加に伴うSt数の変化傾向は、 β の値に関わらず、同じである。また、 β の増加に伴いSt数が増加している。これは、 β の増加によって、角柱の側面を流れる流体が加速されるためであり、Davisら²⁾の計算結果と一致している。図中には'82から'98年の間に報告された実験及び計算結果の値を+印で併示した。これらのSt数はかなり散見しており、本計算の良否は困難である。そこで本計算より求めたSt数の妥当性を確認するため可視化実験を行った。

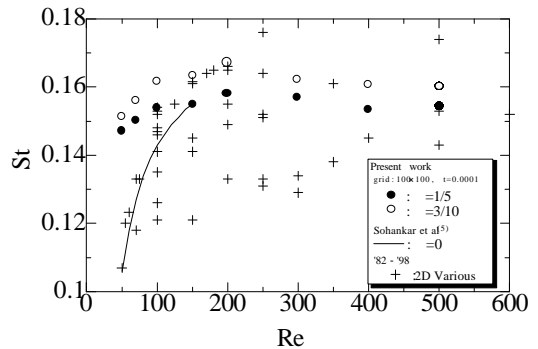


Fig.9 The effect of blockage ratio on Strouhal Number

Fig.10は実験装置を示す。流路幅Hは10mm、奥行きWは80mmである。角柱の大きさBは3mmであり、角柱を流路幅中央に設置した。

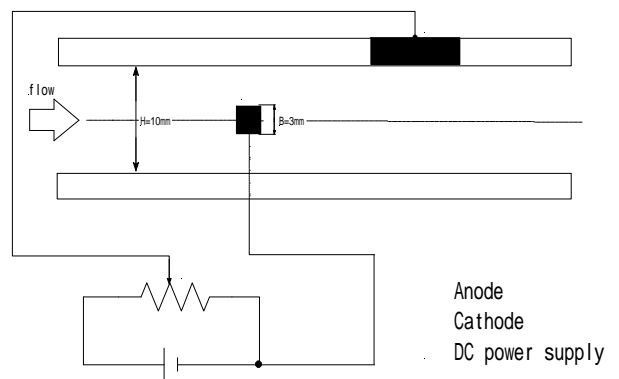


Fig.10 Experimental apparatus

可視化には、電解沈殿法を用いた。すなわち、角柱表面に導電性塗料（ド-タイトD-550）を塗り、角柱を陽極、流路の上壁部を陰極として、この間に電圧を印加したときに陽極近傍に発生する白色の微粒子をトレーサとして、流路の側面から撮影を行った。

Fig.11 は、その際に撮影された $\beta = 3/10$ 、 $Re = 100$ についてある瞬間の (a) 可視化写真と (b) 計算結果より算出した流脈線を示す。

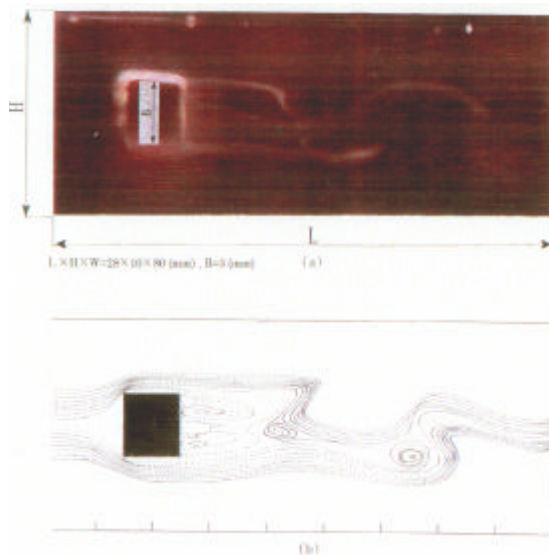


Fig.11 Experimental wake visualizations and computed streaklines for $\beta = 3/10$, $Re = 100$

両者の比較より、角柱背後に形成される渦の形態は、よく一致していることがわかる。また、可視化実験で測定されたカルマン渦の放出周波数を、 St 数にしてまとめた結果を Table 1 に示す。これより、測定された St 数は、計算より得た値に比べ、全体的にやや小さい値を示しているが、 Re 数が大きくなるにつれて、その差は小さくなっている。この違いは、流路のスパン方向の長さが実験では有限であることに影響しているものと考えられるが、実験と計算値との一致は、従来の研究 (Fig.9 参照) に比べて比較的良好である。

Table 1 . Measured and predicted Strouhal numbers for $\beta = 3/10$

Re	70	100	150
Measured St	0.146	0.157	0.162
Predicted St	0.156	0.161	0.163

5. 結言

本研究では、角柱を挿入した平行平板流路内のカルマン渦列に着目し、非定常問題に関する数値的研究の指針を得るため、2次元数値解析を行った。主要な結論は次の通りである。

- ①各物理量の時間ステップや格子間隔の依存性は必ずしも同一ではない。したがって、流れ場の非定常現象を正確に予想するためには、時間ステップに加えて格子間隔に十分な吟味をしなければならない。
- ②計算された St 数は、可視化実験より得られた値と良好に一致する。

謝辞

本研究を遂行するにあたり、山口大学工学部機械工学科エネルギー - 制御工学研究室の吉中良充氏、森尾健一氏に実験に関して、それぞれ助力をいただいた。ここに記して謝意を表す。本研究は、中国技術振興センター - 平成10年度産学 R & D 推進研究の一つとして行われたものである。

参考文献

- 1) Li, G and Humphrey, J.A.C.: Numerical of confined flow past a cylinder of square cross-section at various orientations, *Int. J. Number Methods Fluids*, Vol.20, pp.1215-1236, 1995
- 2) Davis, R.W, Moore, E. F and Purtell, L.P.: A numerical experimental study of confined flow around rectangular cylinders, *Phys. Fluids*, Vol.27, No.1, pp46-59, 1984
- 3) Tatsutani, K, Devarakonda, R and Humphrey, J.A.C.: Unsteady flow and heat transfer for cylinder pairs in a channel, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol.36, pp3311-3328, 1993
- 4) Valencia, A.: Heat transfer enhancement in a channel with a built-in rectangular cylinder, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol.30, pp423-427, 1995
- 5) Sohankar, A, Norberg, C and Davidson, L.: Simulation of three-dimensional flow around a square cylinder at moderate Reynolds numbers, *Phys. Fluids*, Vol.11, pp288-306, 1999
- 6) Nishimura, T, Kaga, T., Shirota, K and Kadowaki, J.: Vortex structures and temperature fluctuations in a bluff-body burner, *J. Visualizations*, Vol.1, pp271-281, 1999
- 7) 西村龍夫, 中桐裕明, 国次公司: 中間レイノルズ数域におけるくぼみ付き流路内の流れパターンと壁面せん断応力(くぼみ長さの影響), *日本機械学会論文集*, B, 62巻, 598号, pp14-20, 1996
- 8) Patankar, S.V.: *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*,

Mcgraw -Hill, pp126-130,1980

9)Perez, J.S. and Cotta, R.M.: Integral transform solution of
developing laminar duct flow in Navier-Stokes formulation,

Int. J. Numer. Methods Fluids, Vol. 20, pp1203-1213, 1995

(1999.7.30 受理)